ক্যালকুলাস-অন্তরীকরণ

অধ্যায়: ৯ম (১ম পত্র)

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

লিমিট

মোঃ মেহেদী হাসান
প্রভাষক: উচ্চতর গণিত
পাশাপোল মডেল কলেজ, চৌগাছা, যশোর।
মোবাইল: ০১৭২৮-৬৮৯২৬৮

* লিমিট বা সীমা: চলমান রাশি x-এর মান উভয় দিক হতে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a-এর দিকে অগ্রসর হয়ে a- এর সন্নিকটবর্তী হওয়ায় যদি ফাংশন $f(x)$ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর যথেচ্ছ সন্নিকবর্তী হয়, তবে l কে $f(x)$ ফাংশনের সীমা বলা হয়।

একে $\lim_{x\to a} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ কর হয়।

দ্রষ্টব্য ঃ $x \to a$ দ্বারা বুঝায় $x > a$ এবং $x < a$ কিন্তু $x \neq a$

* $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হইবার শর্ত ঃ

(i) $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান $f(a)$ বিদ্যমান থাকবে।

(ii) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ বিন্দুতে $\lim_{x\to a^-} f(x)$এর মান $f(a)$ বিদ্যমান থাকবে অর্থ্যাৎ সমীম হবে।

(iii) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ এবং $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ হবে।

* Langrange's mean Valu Theorem এর বর্ণনা ঃ

যদি $f(x)$ একটি ফাংশন হয় যেন,

(i) $f(x)$ ফাংশনটি [a, b] ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং

(ii) (a, b) ব্যবধিতে $f'(x)$ বিদ্যমান তাহলে (a, b) ব্যবধির মধ্যে কমপক্ষে একটি বিন্দু c পাওয়া যাবে।
যেন, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ যেখানে $a < c < b$

* La Hospitals Rule ঃ কোন ফাংশন $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ আকারে থাকলে $x = a$ বসালে যদি $\%, \propto/\propto$ আকার আসে তবে এই নিয়মটি প্রযোজ্য হবে।

* একদিকবর্তী লিমিট ঃ যদি কোন ফাংশনের লিমিট শূন্য এর ডানদিকের সংখ্যাগুলির জন্য সংজ্ঞায়িত হয় তবে তাকে একদিকবর্তী লিমিট বলে।

যেমন ঃ $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$

CamScanner

* লিমিট নির্ণয়ে ব্যবহৃত কয়েকটি ধারাঃ

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

2. $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots$

3. $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

4. $ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$

5. $a^x = 1 + \frac{x}{1!} lna + \frac{x^2}{2!}(lna)^2 + \cdots$

6. $a^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} lna + \frac{x^2}{2!}(lna)^2 - \cdots$

7. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots |x| < 1$

8. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

9. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$

10. $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$

* (i) $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{tanx} = 1$

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$

(iv) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(v) $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

(vi) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(vii) $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$

(viii) $\lim_{x\to -\infty} x^n = \infty, n$ জোড়

* স্যান্ডউইচ উপপাদ্য স্কুইজিং অথবা পিনচিং উপপাদ্য নামেও পরিচিতি।

* অবিচ্ছিন্ন ফাংশন ঃ কোনো ফাংশনের লেখচিত্রে কোথাও কেটে যায়নি বা বিচ্ছিন্নতা না থাকলে ফাংশনটিকে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন বলে।

যেমন ঃ $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = 16$

CamScanner

অন্তরজ নির্ণয়

* অন্তরীকরণ ও অন্তরজ ঃ যে পদ্ধতিতে অন্তরজ নির্ণয় করা হয় তাকে অন্তরীকরণ বলা হয় এবং নির্ণীত ফলাফলকে অন্তরজ বলা হয়।

অর্থাৎ, একটি স্বাধীন চলরাশি x এর সাপেক্ষে অধীন চলরাশি y এর পরির্তনের হার নির্ণয়ই $\frac{dy}{dx}$ এবং এই $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করাকেই অন্তরীকরণ বলে।

* $y = f(x)$ ফাংশনের x-এ ক্ষুদ্র বৃদ্ধি অর্থাৎ $\delta x \to 0$ এর জন্য y-এর বৃদ্ধি δy. তাহলে বৃদ্ধি হার $\frac{\delta y}{\delta x}$ এর সীমাস্থ মানকে (যদি বিদ্যমান থাকে) (x,y) বিন্দুতে x-এর সাপেক্ষে $y = f(x)$ ফাংশনের অন্তরজ বলা হয়।

$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$

$\therefore x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরজ $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ যা মূল নিয়ম নামে পরিচিত।

* $\frac{dy}{dx}$ এর অর্থ কী?

$\frac{dy}{dx}$ বলতে x এর সাপেক্ষে y এর পরির্তনের হারকে বুঝায়, যখন x এর পরিবর্তন খুব সুক্ষ্ম হয়। $\frac{dy}{dx}$ একটি প্রতীক যা y এর উপর $\frac{d}{dx}$ ক্রিয়াকে নির্দেশ করে।

* অন্তরজ একটি বিশেষ ধরনের লিমিট। x এর সাপেক্ষে y= $f(x)$ এর অন্তরজ বুঝানোর জন্য আমরা $y_1, y', \frac{dy}{dx}, f'(x)$প্রভৃতি প্রতীকও ব্যবহার করে থাকি।

* c একটি ধ্রুবক হলে $\frac{d}{dx}(c) = 0$

উদাহরণ ঃ $\frac{d}{dx}(10) = 0$

* কোনো ধ্রুবক এবং একটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ $\frac{d}{dx}[c\,f(x)] = c\frac{d}{dx}\{f(x)\}$

* $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
* $\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$
* $\frac{d}{dx}(sinx) = cosx$
* $\frac{d}{dx}(cosx) = -sinx$
* $\frac{d}{dx}(sinax) = a\,cosax$
* $\frac{d}{dx}(tanx) = sec^2x$
* $\frac{d}{dx}(cotx) = -cosec^2x$
* $\frac{d}{dx}(secx) = secx\,tanx$
* $\frac{d}{dx}(cosec\,x) = -cosecx\,cotx$
* $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

CamScanner

* $\frac{d}{dx}(e^{mx}) = me^{mx}$

* $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

* $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

* $\frac{d}{dx}(\log_a{}^x) = \frac{1}{x}\log_a{}^e$

* $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

* $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

* $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

* $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

* $\frac{d}{dx}(UV) = U\frac{d}{dx}(V) + V\frac{d}{dx}(U)$

* $\frac{d}{dx}(UVW) = UV\frac{d}{dx}(W) +$
$UW\frac{d}{dx}(V) + VW\frac{d}{dx}(U)$

* $\frac{d}{dx}(U/V) = \frac{V\frac{d}{dx}(U) - U\frac{d}{dx}(V)}{V^2}$

* $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

* $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

* $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$

* $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$

* $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

* $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

* $\frac{d}{dx}(U^V) = U^V\frac{d}{dx}(v\ln u)$

* বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনকে অন্তরীকরণ করতে নিম্নরূপে প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে সরল করে নিতে হয়।

(i) $\sqrt{1-x^2}$ থাকলে $x = \sin\theta, \cos\theta$ ধরতে হবে

(ii) $\sqrt{1+x^2}$ থাকলে $x = \tan\theta$ ধরতে হবে

(iii) $\sqrt{a^2+x^2}$ থাকলে $x = a\tan\theta$ ধরতে হবে

(iv) $\sqrt{x^2-1}$ থাকলে $x = \sec\theta, \tan\theta$ ধরতে হবে

(v) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ থাকলে $x = \cos\theta$

(vi) $\sqrt{a^2-x^2}$ থাকলে $x = a\sin\theta, a\cos\theta$

(vii) $\sqrt{x^2-a^2}$ থাকলে $x = a\sec\theta, a\operatorname{cosec}\theta$

(vi) $\frac{2x}{1-x^2}, \frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}$ থাকলে $x = \tan\theta$ ধরতে হবে

CamScanner

* ম্যাকলরিনের উপপাদ্য ঃ যদি $f(x)$ ফাংশনকে x এর ক্রমবর্ধমান শক্তির একটি অসীম ধারায় বিস্তার করা যায় এবং ফাংশনটিকে x এর সাপেক্ষে যেকোন ক্রম পর্যন্ত অন্তরীকরণ করা যায়, তবে $f(x)$ কে নিম্নরুপে লেখা যায়-

$$f(x) = x\,f'(0) + \frac{x^2}{2!}\,f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,f^n(0) + \cdots$$

* পরামিতিক সমীকরণ ঃ x এবং y এর মধ্যেবর্তী সম্পর্ককে সোজাসুজি কোন সমীকরণের আকারে ব্যক্ত না করে তৃতীয় একটি চলকের সাহায্য প্রকাশ করাকে x এবং y এর ঐ সমীকরণ দুটিকে একত্রে পরামিতিক সমীকরণ বলা হয় এবং ৩য় চলকটিকে Parameter বা পরামিতি বলে।

যেমন ঃ $y = f(t), x = f(t)$

স্পর্শক ও অভিলম্ব

* $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ (x,y) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল $\frac{dy}{dx} = tan\theta$ যা ঐ বিন্দুতে অন্তরকের মান নির্দেশ করে।

* (x_1, y_1) বিন্দুতে $y = f(x)$ বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ হবে, $y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$

* স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব রেখাটিকে $y = f(x)$ বক্ররেখার অভিলম্ব বলা হয়।

* (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, $(x - x_1) + \frac{dy}{dx}(y - y_1) = 0$

* $y = f(x)$ বক্ররেখার (x,y) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক

(i) x-অক্ষের সাথে সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = tan0^\circ = 0$

(ii) x-অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dy}{dx} = tan90^\circ = \frac{1}{0}$ অথবা $\frac{dx}{dy} = 0$ হবে।

(iii) x-অক্ষের ধণাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করলে, $\frac{dy}{dx} = tan45^\circ = 1$

(iv) অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করলে, $\frac{dy}{dx} = \pm tan45^\circ = \pm 1$

(v) x-অক্ষের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করলে, $\frac{dy}{dx} < 0$

(vi) x-অক্ষের সাথে সুক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করলে, $\frac{dy}{dx} > 0$

CamScanner

গুরুমান ও লঘুমান

* $y = f(x)$ ফাংশনের লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় করা জন্য (i) $\frac{dy}{dx} = 0$ বসাতে হবে এবং x-এর মানগুলি নির্ণয় করতে হবে। এই সমস্ত মানগুলোকে সংকটবিন্দু / সন্ধিবিন্দু / চরমবিন্দু বলে।

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করে তাতে x-এর মানগুলো বসাতে হবে।

যদি $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ হয় তবে x-এর ঐ মানের জন্য $f(x)$ ফাংশনের লঘুমান পাওয়া যাবে।

আর যদি $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ হয় তবে x-এর ঐ মানের জন্য $f(x)$ ফাংশনের গুরুমান পাওয়া যাবে।

(iii) x-এর মানগুলো $y = f(x)$এ বসিয়ে গুরুমান এবং লঘুমান নির্ণয় করা যাবে।

* ক্রমবর্ধমান ফাংশন ঃ x-এর মান বৃদ্ধির জন্য $y = f(x)$এর মান বৃদ্ধি পায় তবে তাকে ক্রমবর্ধমান ফাংশন বলে। স্পর্শকের ঢাল ধণাত্মক অর্থ্যাৎ $\frac{dy}{dx} > 0$ ।

* ক্রমহ্রাসমানের ক্ষেত্রে ঢাল ঋণাত্মক অর্থ্যাৎ $\frac{dy}{dx} < 0$ ।

(i) যদি $a < x < b$এর জন্য $f'(x) > 0$ হয় তবে $y = f(x)$ ফাংশন (a, b) ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান হবে।

(ii) $a < x < b$এর সকল x-এর জন্য $f'(x) < 0$ হয় তবে $y = f(x)$ ফাংশন (a, b) ব্যবধিতে ক্রমহ্রাসমান হবে।

CamScanner